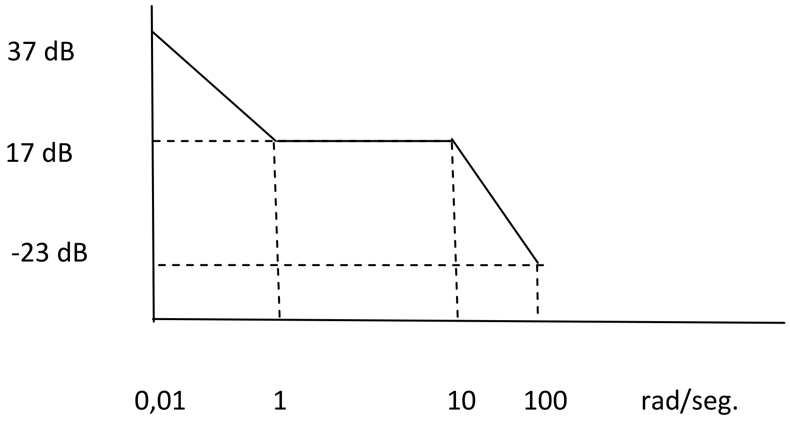
INGENIERIA DE CONTROL. CURSO 15/16

ELAI-ETSIDI Julio 2016

Ejercicio 1: **1,5 puntos (5 min.)**

Obtener el modelo matemático del sistema de la figura:



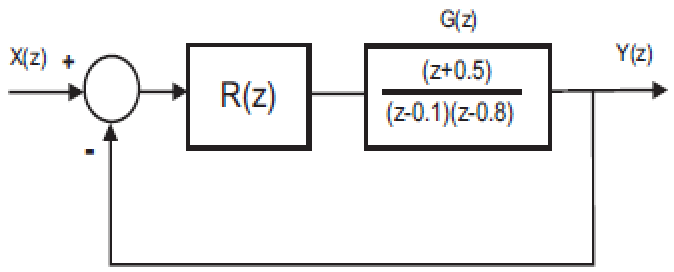
$$\frac{7{,}07(1+j\frac{f}{1})}{jf\,(1+j\frac{f}{10})^2}$$

Ejercicio 2: **3,5 puntos**

Diseñar el regulador discreto $R(z)$ más sencillo que cumpla las siguientes características dinámicas para el sistema mostrado en la figura:

$t_s \approx 5$ s $\pm 2\%$, $\varsigma = 0.5$,

El tiempo de muestreo empleado es $T = 1$ s



$$t_s = \frac{4}{\sigma} = 5\ s\ \Rightarrow \sigma = 0.8\ rad/s$$

$$\sigma = \zeta \cdot \omega_n\ \Rightarrow \omega_n = \frac{0.8}{0.5} = 1.6\ rad/s$$

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = 1.6\sqrt{1-0.5^2} = 1.39\ rad/s$$

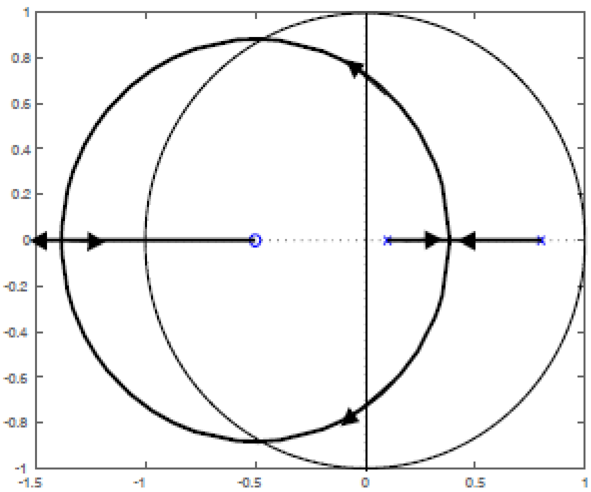
La posición del polo dominante (P_d) en el plano z será:

$$|z| = e^{-T\zeta\omega_n} = 0.5$$

$$\theta = T\omega_d = 1.39\ rad$$

$$P_d = 0.5\ \cos\ 1.39 \pm (0.5\ \text{sen}\ 1.39)i = 0.09 \pm 0.49i$$

El lugar de las raíces del sistema dado será:



Para comprobar si el polo dominante pertenece al lugar se aplica el criterio del argumento,

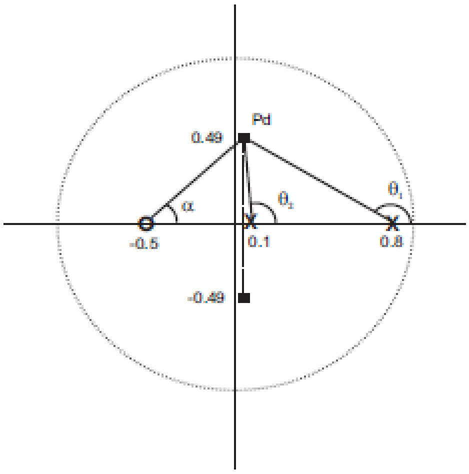
$$\theta_1 = 180 - \arctan\frac{0.49}{0.8-0.09} = 145.39^\circ$$

$$\theta_2 = 180 - \arctan\frac{0.49}{0.1-0.09} = 91.17^\circ$$

$$\alpha = \arctan\frac{0.49}{0.5+0.09} = 39.71^\circ$$

El criterio del argumento debe verificar:

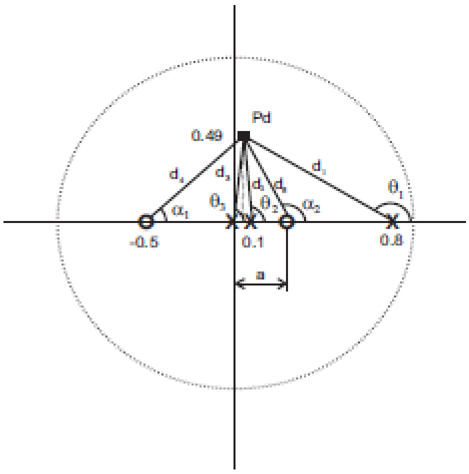
$$\theta_1 + \theta_2 - \alpha = 180^\circ$$



por tanto,

$$145.39 + 91.17 - 39.71 = 196.85^{\circ} \neq 180^{\circ}$$

El polo dominante no pertenence al lugar. Se modifica con la incorporación de un regulador PD, añadiendo un cero ajustable y un polo en el origen.



El ángulo que formará el polo dominante con el cero se obtendrá mediante el criterio del argumento:

$$\theta_3 = \arctan \frac{0.49}{0.09} = 79.6^\circ$$

$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 - \alpha_1 - \alpha_2 = 180^\circ \Rightarrow \ \alpha_2 = 96.45^\circ$$

De manera que la posición que ocupa el cero sobre el eje real será:

$$180 - \alpha_2 = 83.55^\circ$$

$$\tan 83.55 = \frac{0.49}{(a - 0.09)} \Rightarrow \ a = 0.145$$

Calculando las distancias a polos y ceros desde el polo dominante:

$$d_1 = \sqrt{(0.8 - 0.09)^2 + 0.49^2} = 0.86$$

$$d_2 = \sqrt{(0.1 - 0.09)^2 + 0.49^2} = 0.49$$

$$d_3 = \sqrt{0.09^2 + 0.49^2} = 0.5$$

$$d_4 = \sqrt{(0.09 + 0.5)^2 + 0.49^2} = 0.77$$

$$d_5 = \sqrt{(a - 0.09)^2 + 0.49^2} = 0.49$$

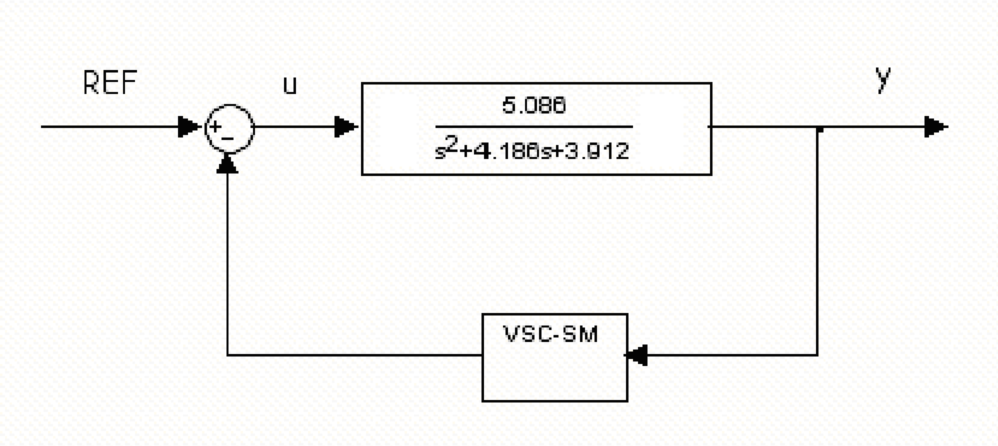
Con el criterio del módulo, el valor global que debe tomar K en ese punto del lugar será,

$$K = \frac{d_1 \cdot d_2 \cdot d_3}{d_4 \cdot d_5} = \frac{0.86 \cdot 0.49 \cdot 0.5}{0.77 \cdot 0.49} = 0.56$$

Finalmente, la función de transferencia del regulador PD buscado será:

$$R(z) = 0.56 \cdot \frac{(z - 0.145)}{z}$$

Ejercicio 3: válvula motorizada **puntos: 5**



Se pide:

1. diseñar un controlador **VSC-SM**. Determinar los valores de parámetros de conmutación. Suponer la línea de conmutación s=0,5x_1+x_2

2. qué tipo de amortiguamiento tiene cada una de las dos estructuras

2. modificar la ley de control para añadir una capa límite entre las dos estructuras.

1. diseñar un controlador **VSC-SM**. Determinar los valores de parámetros de conmutación. Suponer la línea de conmutación s=0,5x_1+x_2

$$\frac{y}{u} = \frac{5.086}{s^2 + 4.186s + 3.912} \qquad \text{[Eq.2.4]}$$

$$ys^2 = -4.186s^2 \cdot y - 3.912s \cdot y + 5.086u \qquad \text{[Eq.2.5]}$$

- Atendiendo al siguiente cambio de variables:

$$\begin{aligned} x_1 &= y \\ x_2 &= \dot{x}_1 = \dot{y} = s \cdot y \\ x_3 &= \dot{x}_2 = \ddot{x}_1 = \ddot{y} = s^2 \cdot y \end{aligned} \qquad \text{[Eq.2.6]}$$

- Se realiza el anterior cambio de variables en la ecuación 2.5 y se obtiene la siguiente expresión:

$$\dot{x}_2 = -4.186x_2 - 3.912x_1 + 5.086u$$

- Finalmente, el sistema de control de la Figura 2.4 queda representado por las siguientes ecuaciones de estado:

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = -3.912x_1 - 4.186x_2 + 5.086u \qquad \text{[Eq.2.7]}$$

- Dónde u es la acción de control:

$$u = REF - \Psi x_1 \qquad \text{[Eq.2.8]}$$

Siendo REF el valor de la entrada que se introduce al sistema.

- La acción de control es una función lineal por tramos de x con coeficientes discontinuos dónde ψ toma los siguientes valores:

$$\psi = \begin{cases} \alpha & si\ x_1 s \succ 0 \\ \beta & si\ x_1 s \prec 0 \end{cases}$$

- Conforme los algoritmos de diseño de un controlador de estructura variable, el primer paso conlleva la selección de la función de conmutación s(x).

- Para seleccionar dicha función se tiene que tener en cuenta las características en las dinámicas de un sistema de estructura variable.

- Atendiendo a estas características, al ser la superficie que describe s(x)=0 la que define la respuesta transitoria del sistema durante el modo deslizante, y al ser durante el SM la dinámica de la trayectoria de un orden menor que el orden del sistema original; la función de conmutación toma la forma de un sistema de primer orden.

- Conforme (Utkin,1977), la línea de conmutación toma la forma:

$$s = cx_1 + x_2 \qquad \text{[Eq.2.9]}$$

Con el cambio de variables:

$$x_1 = y$$
$$x_2 = \dot{y}$$

. La ecuación 2.9 queda del siguiente modo:

$$s = cy + \dot{y} \qquad \text{[Eq.2.10]}$$

- Dada la función de transferencia estándar de un sistema de primer orden:

$$\frac{y}{u} = \frac{1}{Ts+1}$$

$$\left.\frac{y}{u}=\frac{1}{Ts+1}=\frac{1/T}{s+1/T}\right\} \quad \Rightarrow \dot{y}+\frac{1}{T}\cdot y=0 \qquad \text{[Eq.2.11]}$$

- Identificando la ecuación 2.10 con la ecuación 2.11 se obtienen el parámetro c de la línea de conmutación S(x)=0:

$$c=\frac{1}{T} \qquad \text{[Eq.2.12]}$$

Donde T es la constante de tiempo.

- Sustituyendo la ecuación 2.12 en la ecuación 2.9 se obtiene la siguiente expresión.

$$s=\frac{1}{T}x_1+x_2 \qquad \text{[Eq.2.13]}$$

- En función del valor de c y por lo tanto del valor de T que se escoja se tendrá una respuesta del sistema más o menos rápida.

- De este modo, tal cómo requieren las características de los sistemas de estructura variable, la ecuación de la línea de conmutación S(x)=0 define la respuesta transitoria del sistema durante el SM.

- Tomando cómo parámetro c de la línea de conmutación el valor 0.5, ésta toma la forma:

$$\mathrm{S}=0.5\cdot \mathrm{x}_1+\mathrm{x}_2$$

[Eq.2.14]

- El siguiente paso en el diseño del VSC implica definir la ley de control u.

$$\mathrm{u}=\mathrm{REF}-\Psi \mathrm{x}_1$$

Donde

$$\psi=\begin{cases}\alpha & si\ x_1 s \succ 0\\ \beta & si\ x_1 s \prec 0\end{cases}$$

Conforme al fundamento del VSC se trata de elegir una ley de control, de forma que en función del valor de ψ, u cambie entre valores distintos y así modificar la estructura del sistema en cadena cerrada y en consecuencia las trayectorias de los estados.

- Para definir la ley de control es necesario obtener los parámetros α y β. Según ψ tome los valores α ó β se obtendrá dos estructuras distintas con sus respectivas trayectorias.

- Para asegurar el alcance al plano de conmutación s(x)=0 desde cualquier punto del plano de fase, es necesario elegir los parámetros de la ley de control aplicando la condición de alcance propuesta en (Emelyanov,1967) y (Utkin, 1978).Ecuación 2.15.

$$s\cdot\dot{s}\prec 0 \qquad \text{[Eq.2.15]}$$

- La condición de alcance se aplica del siguiente modo:
- A partir de la ecuación 2.14 se obtiene x_2

$$\mathrm{s} = 0.5\cdot \mathrm{x}_1 + \mathrm{x}_2 \quad \Rightarrow x_2 = \dot{x}_1 = -0.5\cdot x_1 \qquad \text{[Eq.2.16]}$$

Derivando, se obtiene $\dot{s}$

$$\dot{s} = 0.5\cdot \dot{x}_1 + \dot{x}_2 \qquad \text{[Eq.2.17]}$$

- Sustituyendo en la expresión anterior las ecuaciones de estado del sistema detalladas en la ecuación 2.7 y la ecuación 2.8, $\dot{s}$ es ahora:

$$\dot{s} = 0.5\cdot(-0.5\cdot x_1) - 3.912\cdot x_1 - 4.186\cdot(-0.5\cdot x_1) + 5.086\cdot u$$

- De aplicar la condición de alcance van a resultar unos parámetros α y β que no son función de la entrada REF que se le meta al sistema.

- Al tener estos parámetros el mismo valor para cualquier entrada, en la ecuación 3.8 se puede tomar REF = 0. Así al sustituir u en la expresión anterior se reducen cálculos.

$$\mathrm{u} = \mathrm{REF} - \Psi \mathrm{x}_1 \quad \Rightarrow u = -\Psi x_1 \qquad \text{[Eq.2.18]}$$

$$\dot{s} = 0.5\cdot(-0.5\cdot x_1) - 3.912\cdot x_1 - 4.186\cdot(-0.5\cdot x_1) + 5.086\cdot(-\Psi x_1)$$

$$\dot{s} = -x_1\cdot(2.069 - 5.086\Psi)$$

- Para que se cumpla la condición de alcance:

$$s\cdot\dot{s} \prec 0 \quad \Rightarrow s\cdot(-2.069 - 5.086\Psi)\cdot x_1 \prec 0$$

- De la última ecuación se obtiene lo siguiente:

$$Si\ s\cdot x_1 \prec 0 \quad \Rightarrow -2.069 - 5.086\Psi \succ 0 \quad \Rightarrow \Psi \le -0.4068$$

$$Si\ s\cdot x_1 \succ 0 \quad \Rightarrow -2.069 - 5.086\Psi \prec 0 \quad \Rightarrow \Psi \ge -0.4068$$

- A partir de las ecuaciones anteriores se toman los siguientes valores para los parámetros α y β

$$\psi = \begin{cases} \alpha = 0.5 & si\ x_1 s \succ 0 \\ \beta = -0.5 & si\ x_1 s \prec 0 \end{cases} \qquad \text{[Eq.2.19]}$$

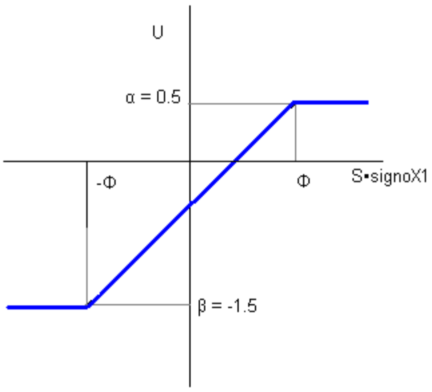
2. para examinar el comportamiento de cada estructura, se sustituye los valores de los parámetros α y β. Luego se examinan los polos del lazo cerrado. Si los polos son reales negativos, el sistema será sobreamortigauado. Si los polos son complejos conjugados con la parte real negativa, el sistema será subamortigado.
Por ejemplo,
con α=0,5. Los polos se encuentran en

P1,2= -2,093±j1,438 (sistema subamortiguado)

Con
β= -0,5, los polos se encuentran en:

P1= -0,163 y p2=-4,023 (sistema sobreamortiguado)

3. modificar la ley de control para añadir una capa límite entre las dos estructuras.



$$u(s) = sat(s) = \begin{cases} -\alpha x_1 & cuando \quad s * signox_1 > \phi \\ -(s * \frac{1}{\phi} - 0.5) * x_1 & cuando \quad -\phi \leq s * signox_1 \leq \phi \\ -\beta x_1 & cuando \quad s * signox_1 < \phi \end{cases}$$